

Cours 6

Eléments nonlinéaires

EE 105 – Sciences et technologies de l'électricité
Printemps 2025

Prof. Camille Brès - camille.bres@epfl.ch

Principe de Thévenin

- Un circuit composé de multiples sources/multiples résistances peut être remplacé par une seule résistance en série (R_i) avec une source de tension indépendante (U_0)

Principe de Norton

- Un circuit composé de multiples sources/multiples résistances peut être remplacé par une seule résistance en parallèle (R_i) avec une source de courant indépendante (i_{cc})

Un circuit est adapté en puissance lorsque la résistance de la charge est égale à la résistance interne du circuit qui l'alimente

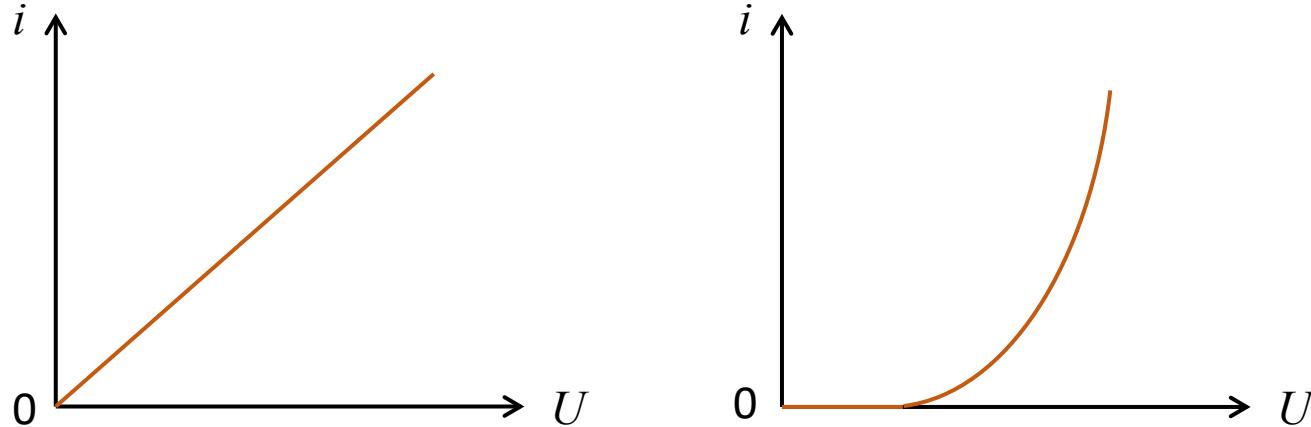
$$R_i = R_L$$

$$P_{L,max} = \frac{U_0^2}{4R_i}$$

Jusqu'à présent nous avons toujours considéré que les éléments d'un circuit étaient linéaires, telle que la relation $i = f(u)$ est linéaire.

Il existe cependant beaucoup de composants en électrotechnique telle que la relation $i = f(u)$ n'est pas linéaire.

- C'est le cas notamment des diodes .
- Des éléments électro-optiques, tels que les lasers à semi-conducteurs, ont eux aussi une réponse non-linéaire .

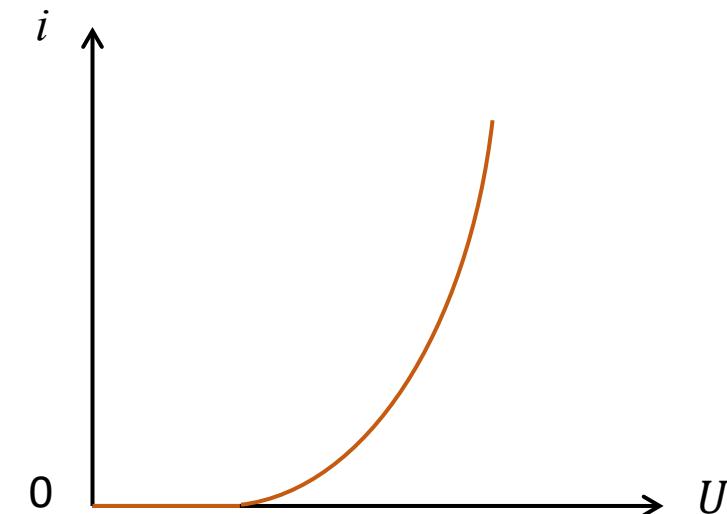
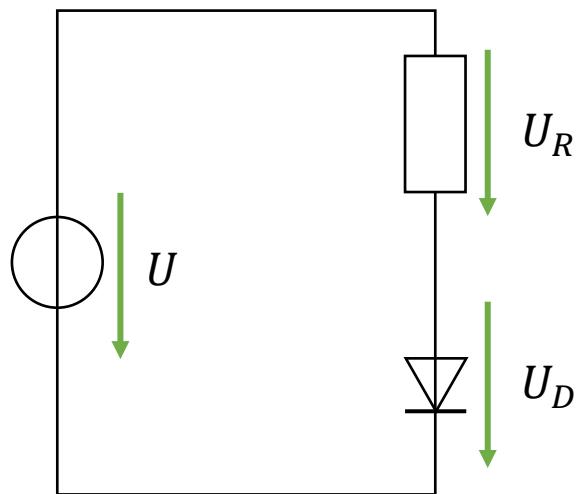


Nous pouvons avoir recours à des méthodes numériques ou graphiques

- Ici nous allons simplement illustrer la méthode graphique avec des exemples concrets

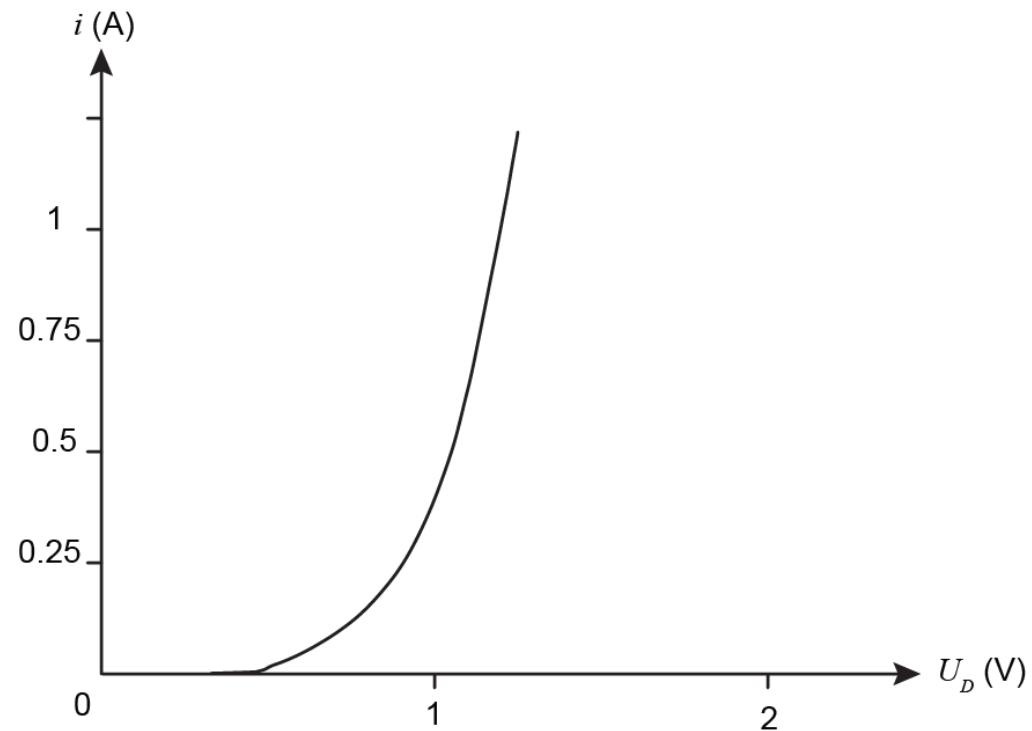
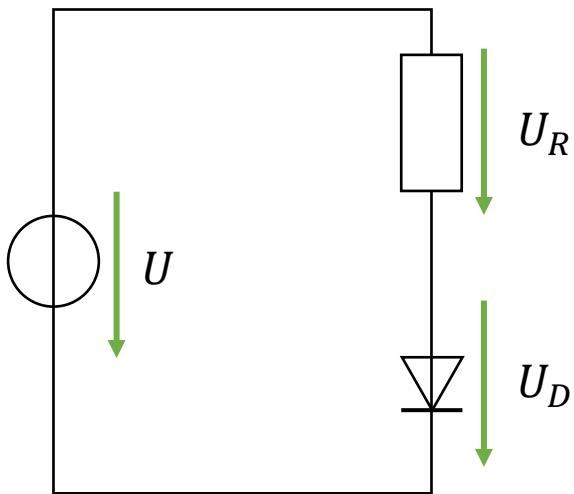
EPFL Analyses de circuit avec éléments non-linéaires

Considérons le circuit contenant une diode D dont la caractéristique courant-tension est reportée par le graphe.



$U = 2V$ et $R = 1.6 \Omega$.

Calculer U_r



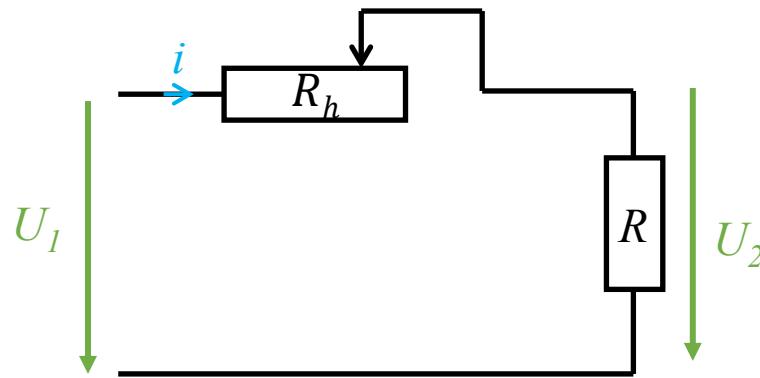
Lorsqu'un appareil est prévu pour fonctionner sous une tension inférieure à la tension délivrée par la source disponible, il est néanmoins possible de l'utiliser.

On le place en série avec une résistance additionnelle qui provoquera la chute de tension nécessaire

Exemple: soit un moteur M, de puissance nominale 240 W, destiné à fonctionner sous une tension $U_m = 30$ V. Nous disposons d'une source de tension de 40 V.

Un *rhéostat* est une résistance électrique réglable qui, intercalée en série dans un circuit, permet d'en modifier l'intensité du courant

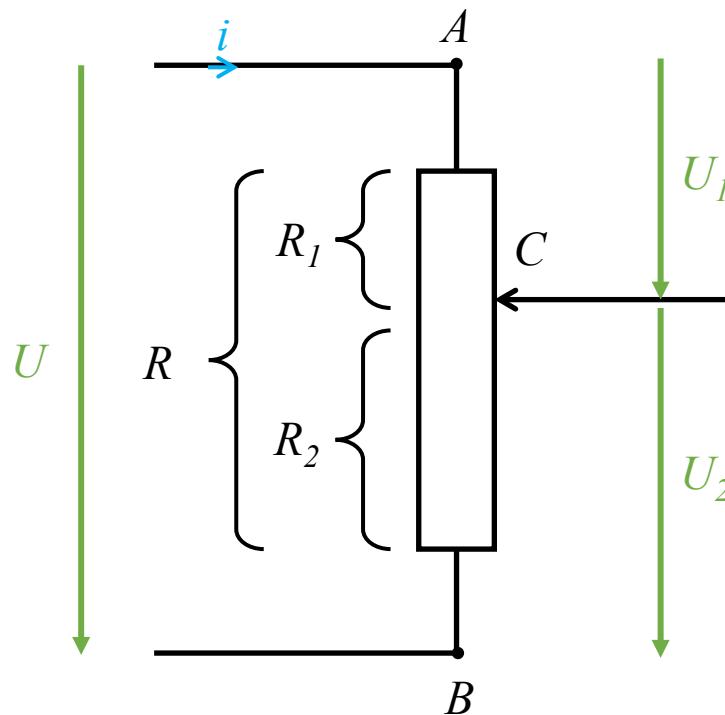
- Il est généralement constitué d'une résistance variable dimensionnée de manière à supporter l'intensité maximale du courant devant la traverser.



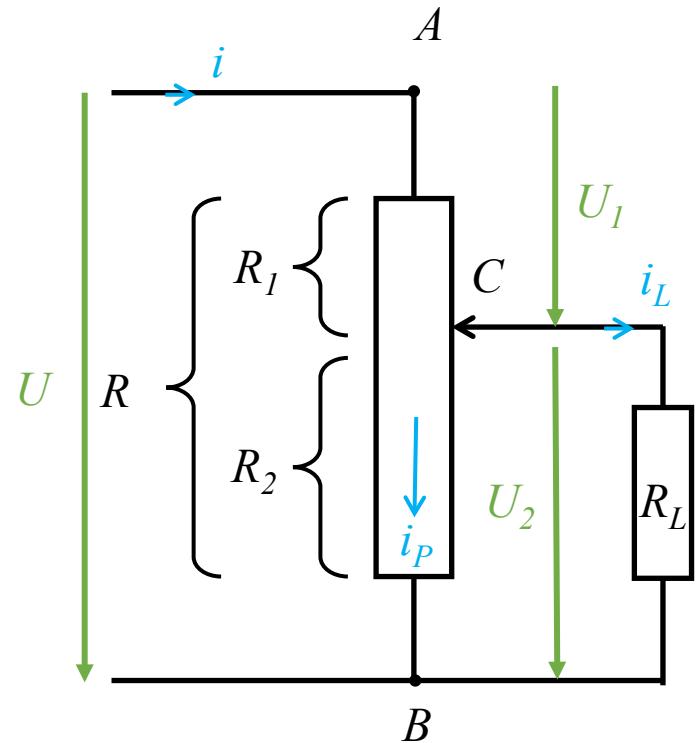
- Le rhéostat R_h permet de régler i et U_2 bien que la tension U_1 disponible soit constante

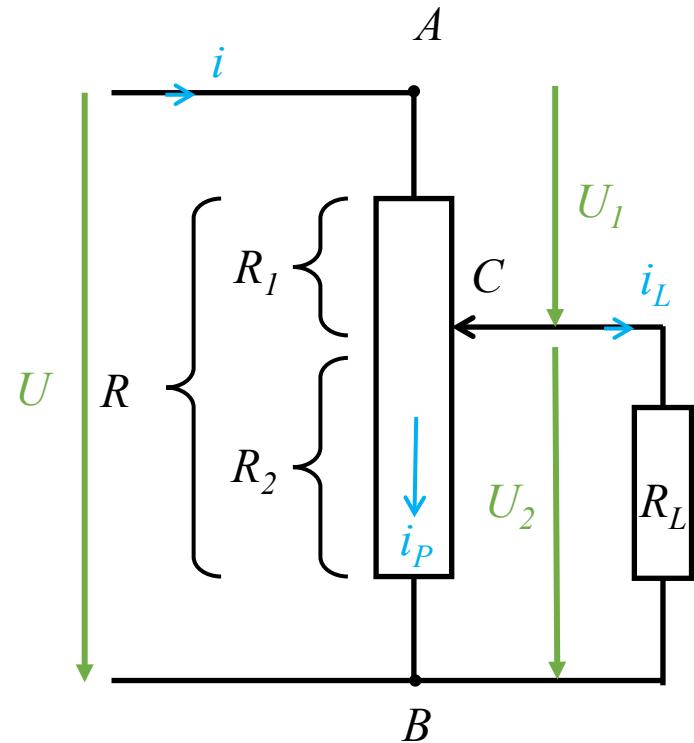
Un potentiomètre est un type de résistance variable à trois bornes:

- une est reliée à un curseur se déplaçant sur une piste résistante terminée par les deux autres bornes.
- Permet de recueillir, entre la borne C et une des deux autres bornes, une tension qui dépend de la position du curseur et de la tension à laquelle est soumise la résistance



Quand aucun appareil n'est branché entre B et C , variations de U_2 en fonction de R_2 sont linéaires.

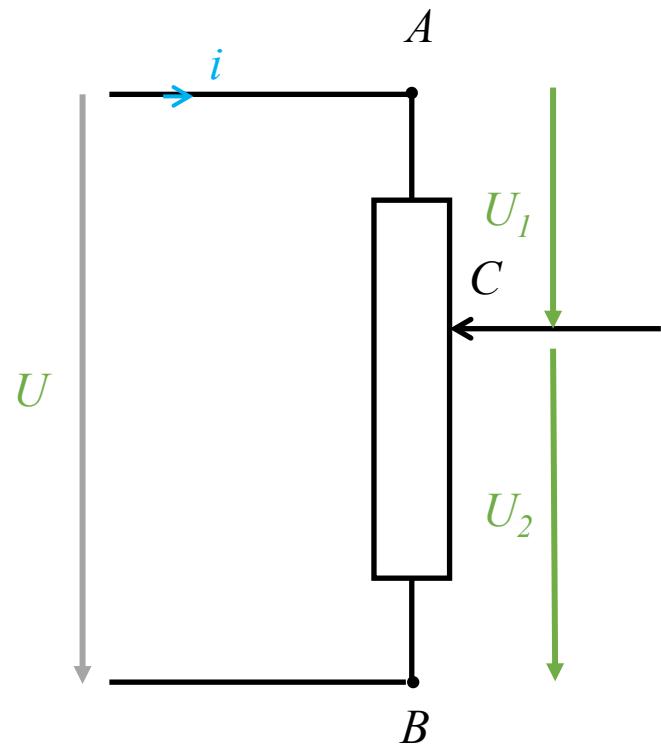




$$U_2 = \frac{U}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_L}}$$

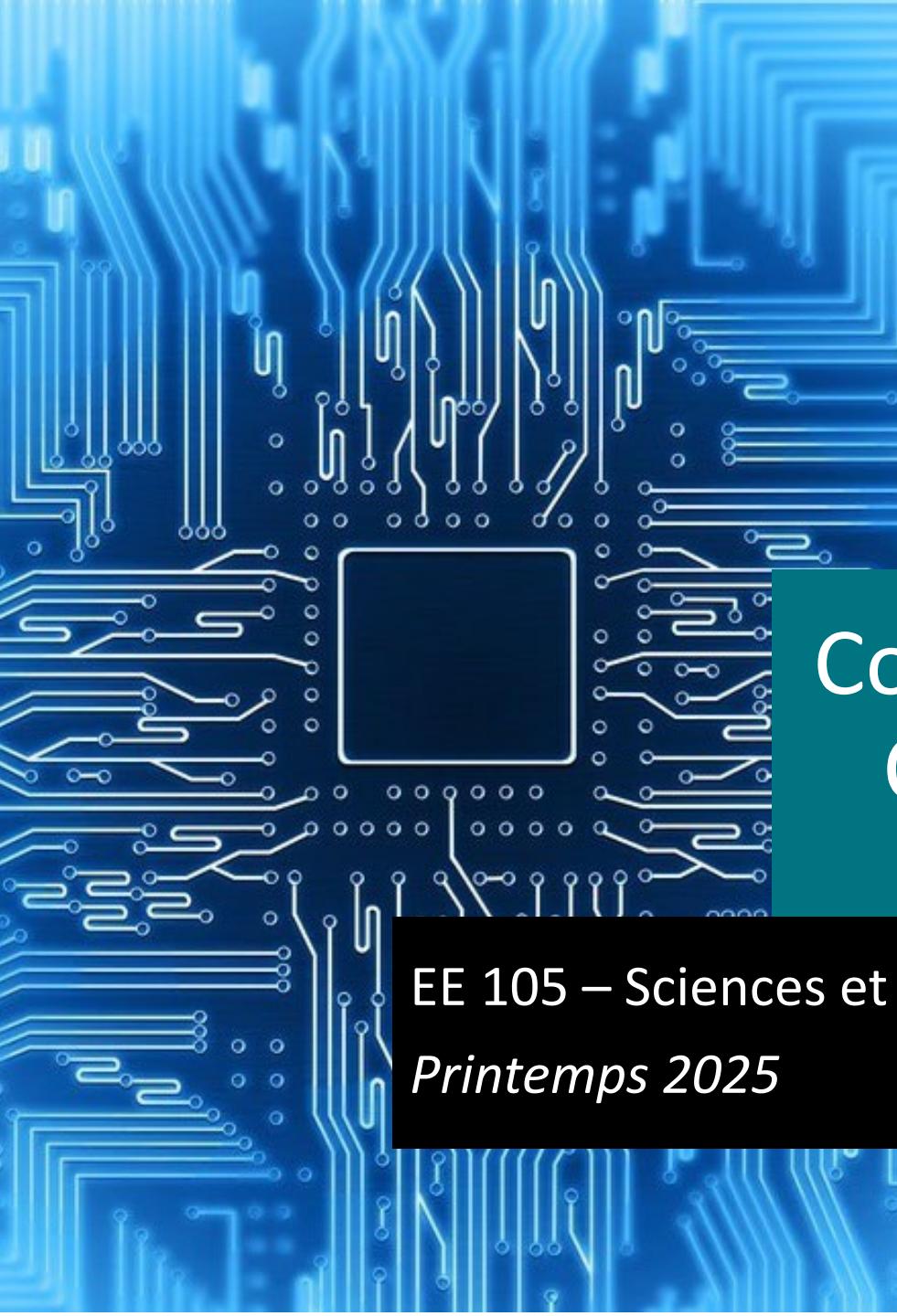
La tension en charge est inférieure à la tension à vide

- Sauf si le curseur est en B: $U_2 = 0$ V
- Sauf si le curseur est en A: $U_2 = U$



On utilise un rhéostat de 150Ω en potentiomètre. La tension entre les bornes extrêmes est $U = 210$ V. Le curseur est placé au milieu.

- Quelle est la tension U_2 sans charge placée entre B et C ?
- Quelle est la tension U_2 pour $R = 150 \Omega, 50 \Omega, 25 \Omega$ placée entre B et C



Cours 6

Condensateur et capacité

EE 105 – Sciences et technologies de l'électricité
Printemps 2025

Prof. Camille Brès - camille.bres@epfl.ch

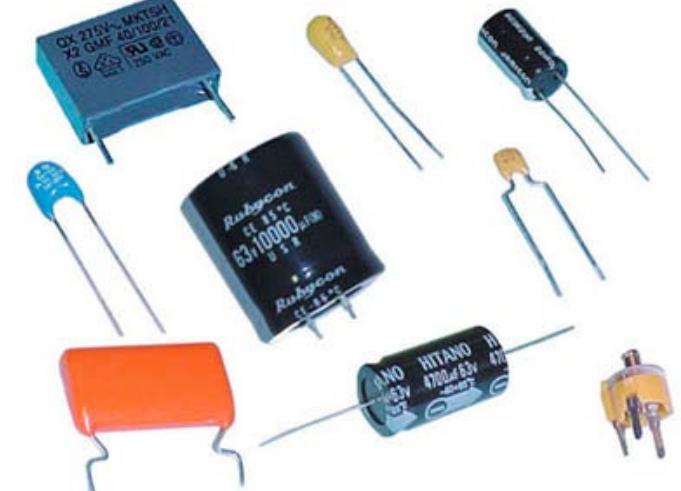
Les condensateurs

Le condensateur est un composant électrique élémentaire

- Dipôle
- Très utilisé

Utilisé comme:

- Accumulateur d'énergie
- Mémoire
- Filtre antiparasites
- Protection dans les circuits à courant alternatif (évite les discontinuités)
- ...

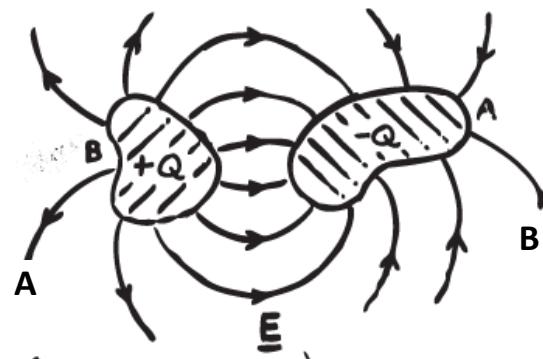


Soit deux surfaces conductrices:

- de forme quelconque,
- isolées et fixes dans l'espace.

Les deux surfaces conductrices ont une charge nette Q égale et opposée.

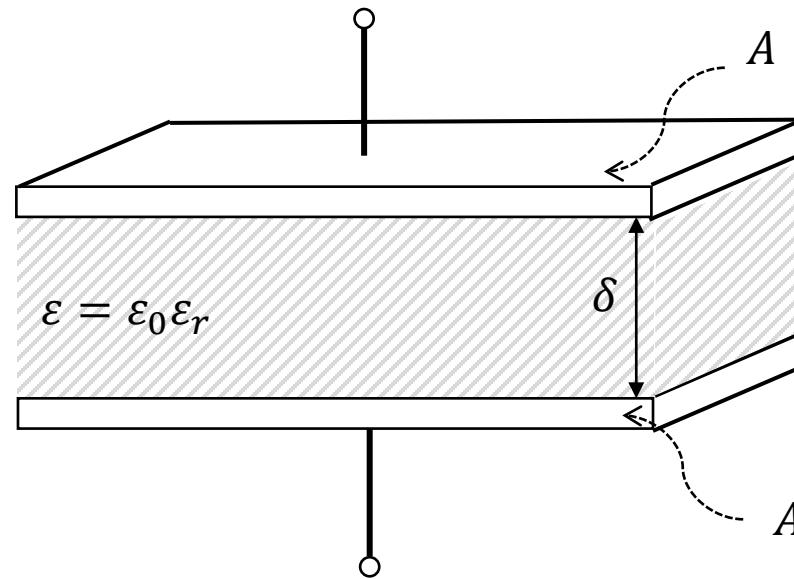
- La séparation de charge $\pm Q$ est générée lorsqu'une source de tension est connectée à un tel arrangement.



Un tel système est un condensateur

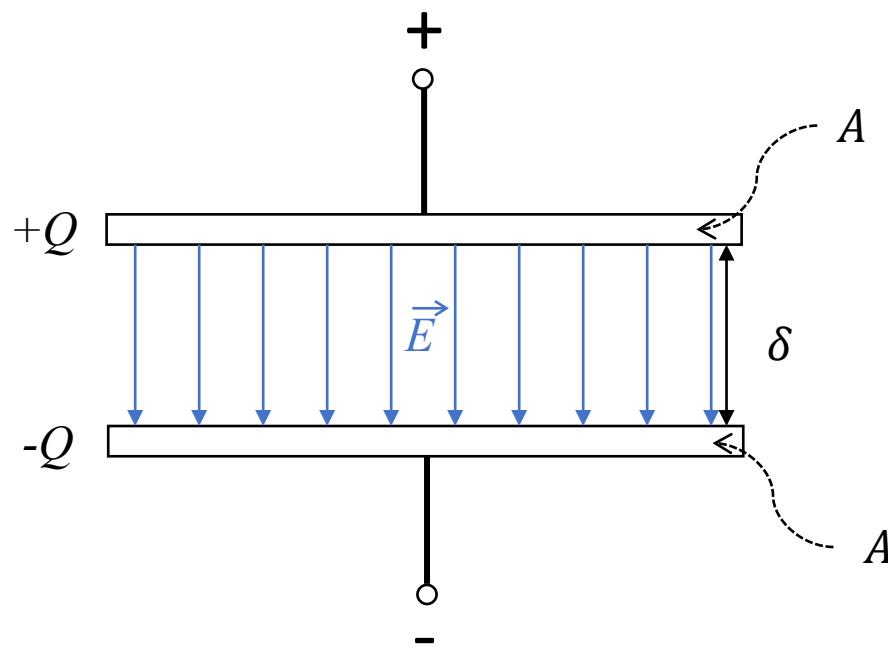
On parle de **condensateur plan** lorsque les deux électrodes d'un condensateur sont deux plaques parallèles tel que:

- Chaque électrode a une surface A
- Les électrodes sont séparées par une distance δ
- Entre les électrodes se trouve un diélectrique de permittivité $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$



Lorsque les plaques sont grandes par rapport à δ ($A \gg \delta$)

- Les effets de bord peuvent être négligés.
- Nous supposons donc que le champ électrique qui s'établit entre les deux plaques lorsqu'une tension y est présente est homogène.



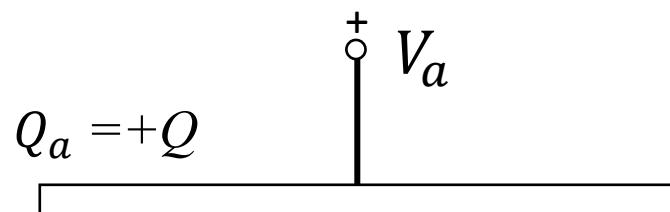
- Le déplacement électrique \vec{D} est proportionnel à \vec{E}

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

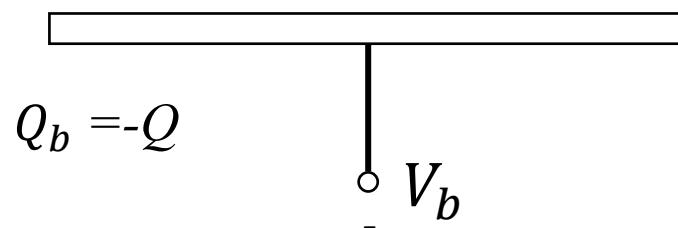
- \vec{D} est également un **flux électrique**

$$|\vec{D}| = \frac{Q}{A}$$

Un condensateur est caractérisé par la propriété d'accumuler les charges sous l'action d'une différence de potentiel



$$Q_a = -Q_b \propto V_a - V_b$$



$$Q_a = Q = C(V_a - V_b)$$

C est la capacité du condensateur

$$Q = CU_{ab}$$

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{As}{V} \equiv F$$



Michael Faraday (1791 - 1967)

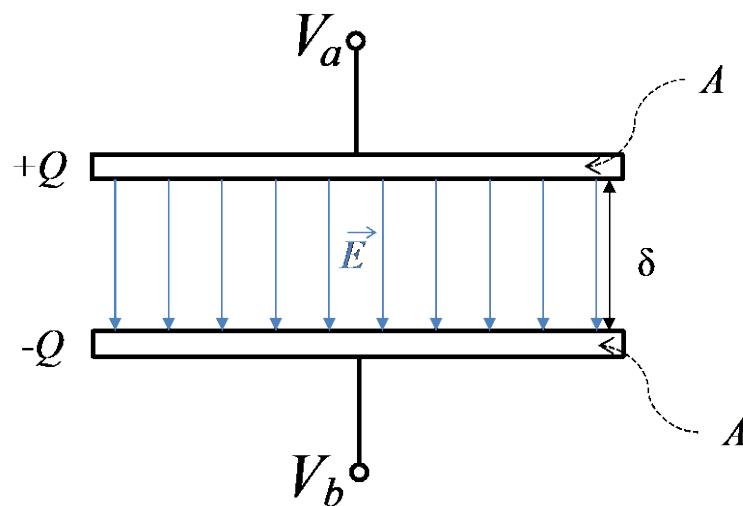
- Michael Faraday est un physicien et un chimiste britannique, connu pour ses travaux fondamentaux dans le domaine de l'électromagnétisme et l'électrochimie. Par exemple en 1831 il a découvert l'induction électromagnétique. Faraday démontre que la charge se situe seulement à l'extérieur d'un conducteur chargé, et que celle-ci n'a aucun effet sur ce qui peut être situé à l'intérieur : c'est l'effet de "blindage", utilisé dans la cage de Faraday.
- Son nom a été donné à l'unité de mesure SI de la capacité électrique
- Trivia: son portrait figure sur certains billets anglais de 20 livres

Nous savons que:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \text{ et que } |\vec{D}| = \frac{Q}{A}$$

$$Q = \epsilon |\vec{E}| A$$

Hors pour un champ homogène nous pouvons écrire: $|\vec{E}| = \frac{U_{ab}}{\delta}$



$$Q = \epsilon A \frac{U_{ab}}{\delta}$$

Par définition: $Q = CU_{ab}$

Puisque : $Q = \varepsilon A \frac{U_{ab}}{\delta}$

On en déduit que

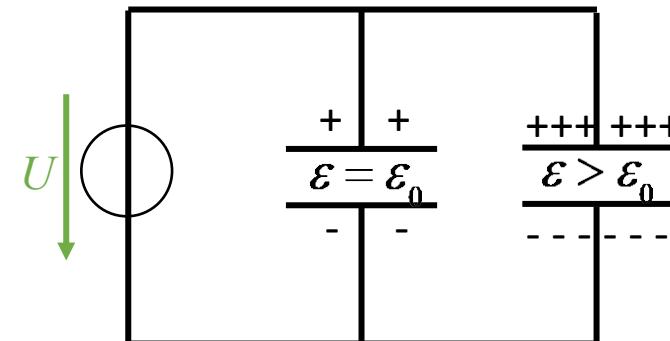
$$C = \varepsilon \frac{A}{\delta}$$

- La capacité est proportionnelle à la surface des électrodes (A)
- La capacité est inversement proportionnelle à distance séparant les électrodes (δ)
- Plus la permittivité du matériau remplissant (ε) le condensateur est élevé plus la capacité est grande

Modélisons un condensateur plan avec

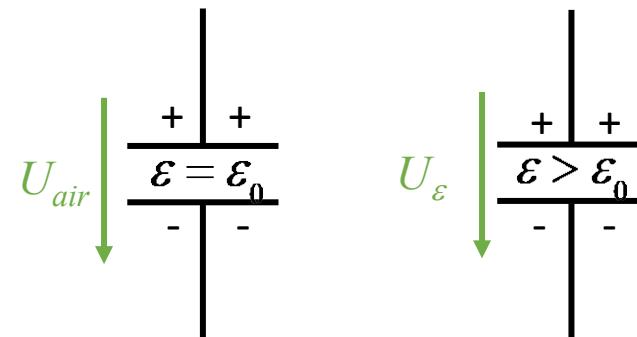
- De l'air entre les électrodes ($\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$)
- Une séparation de $\delta = 1 \text{ mm}$
- Une capacité C de 1 F

Electrodes + tension identiques, différents matériaux



- Conclusion: $\epsilon \rightarrow$ grande C

Electrodes + charge stockée identiques, différents matériaux



- Conclusion: $U_\epsilon = \frac{1}{\epsilon_r} U_{air}$

La fonction première d'un condensateur est d'accumuler de l'énergie.

Un condensateur se charge lorsqu'une tension est appliquée à ses bornes:

- Condensateur chargé: charge Q est constante.
- Or $i(t) = \frac{dQ}{dt}$: si Q est constante alors le courant est nul $i(t) = 0$

Condensateur chargé devient alors donc un circuit ouvert

Un condensateur se décharge lorsqu'il est par exemple connecté à une résistance:

- Il libère l'énergie accumulée.
- Il se comporte alors comme une source de tension.

Un condensateur emmagasine une quantité d'énergie électrique égale au travail accompli pour le charger:

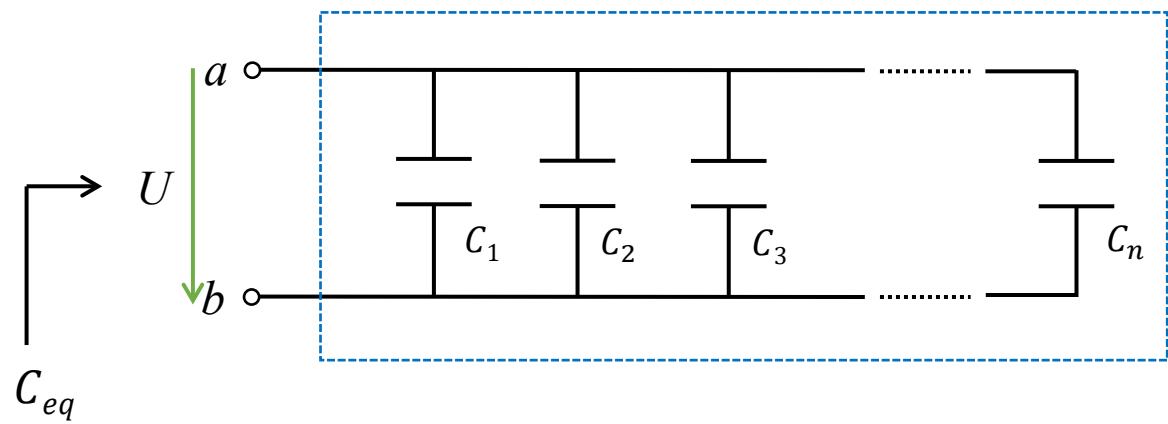
- Supposons à un instant donné la charge déjà accumulée soit q .
- Différence de potentiel entre les électrodes: $\frac{q}{C}$
- Travail nécessaire pour faire passer charge infinitésimale dq de l'électrode positive à celle négative:

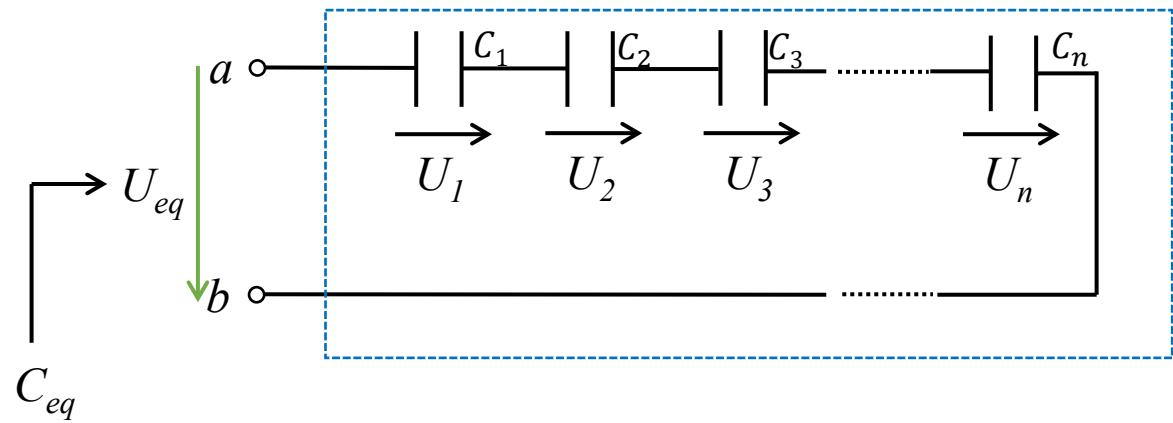
$$dW = \frac{q}{C} dq$$

- Travail total: $W_C = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \Big|_0^Q$

$$W_C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$W_C = \frac{1}{2} C U_{ab}^2$$





Comportement dynamique

Rappels:

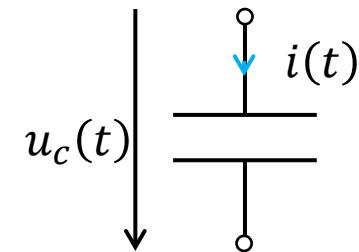
- Un condensateur accumule de l'énergie et peut ensuite la donner.
- On a vu qu'en régime continu $i = 0$: le condensateur chargé se comporte comme un circuit ouvert
- Que se passe-t-il **pendant** la charge du condensateur?

Nous avons déjà que

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

$$Q = Q(t) = Cu_c(t)$$

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$



$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

$$du_c(t) = \frac{1}{C} i(t) dt$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt'$$

Pour un point de référence t_0 :

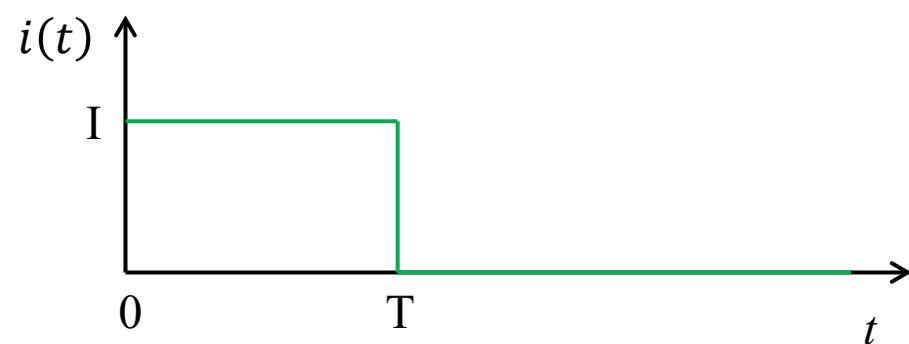
$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(t') dt' + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt'$$

$$u_c(t) = u_c(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt'$$

Considérons un condensateur initialement déchargé. Une impulsion de courant $i(t)$ y est appliquée (voir figure).

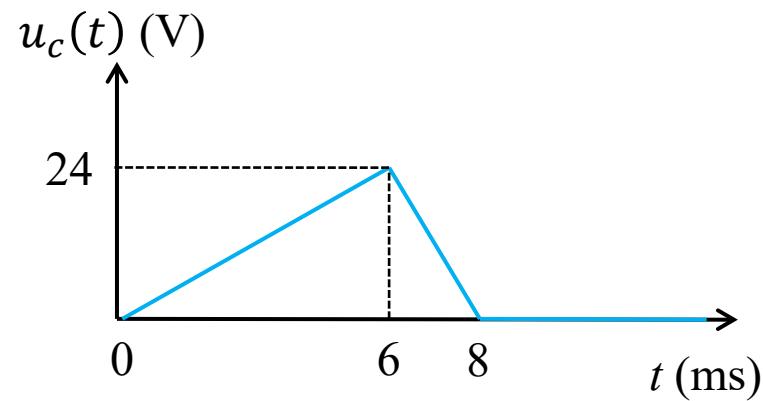
Comment varie la tension aux bornes du condensateur?

$$u_c(t) = u_c(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt'$$

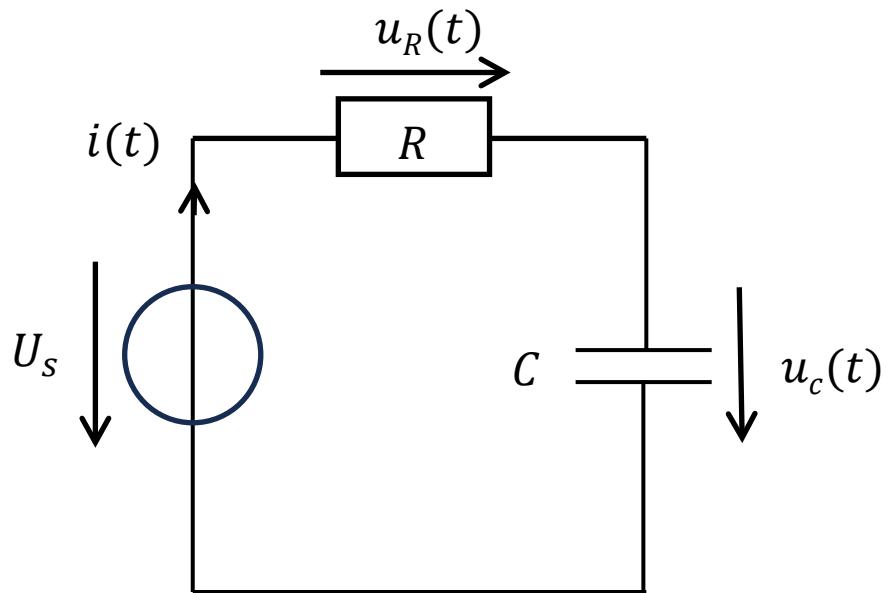


La tension $u_c(t)$ aux bornes d'un condensateur de $5 \mu\text{F}$ suit la tendance décrite dans la figure. Cherchons le courant correspondant.

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$



On modélise un circuit dépendant du temps t .



Définition de la fonction exponentielle: solution de l'équation différentielle

$$\frac{dg(z)}{dz} = g(z)$$

La fonction exponentielle s'écrit: $g(z) = e^z$

Propriété: si $h(z) = e^{kz}$ alors $\frac{dh(z)}{dz} = ke^{kz} = kh(z)$

EPFL Point sur les équations différentielles d'ordre 1

On souhaite déterminer une fonction $x(t)$ régie par une équation différentielle d'ordre 1

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

- τ est une constante de temps (nécessaire pour que l'équation soit physiquement correcte)
- X_0 est une constante

1. On résout l'équation homogène: $\frac{dx_h(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x_h(t) = 0$

- Les solutions d'une telle équation sont des fonctions exponentielles:

$$x_h(t) = Ke^{-t/\tau}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x(t) = \frac{1}{\tau} X_0$$

2. On cherche la solution particulière:

- L'équation accepte une solution sous la forme de constante ($\frac{dx_p(t)}{dt} = 0$)

$$\frac{1}{\tau} x_p(t) = \frac{1}{\tau} X_0$$

$$x_p(t) = X_0$$

3. On additionne la solution de l'équation homogène associée et la solution particulière

$$x(t) = K e^{-t/\tau} + X_0$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = X$$

$$x(t) = \tau X + K e^{-t/\tau}$$

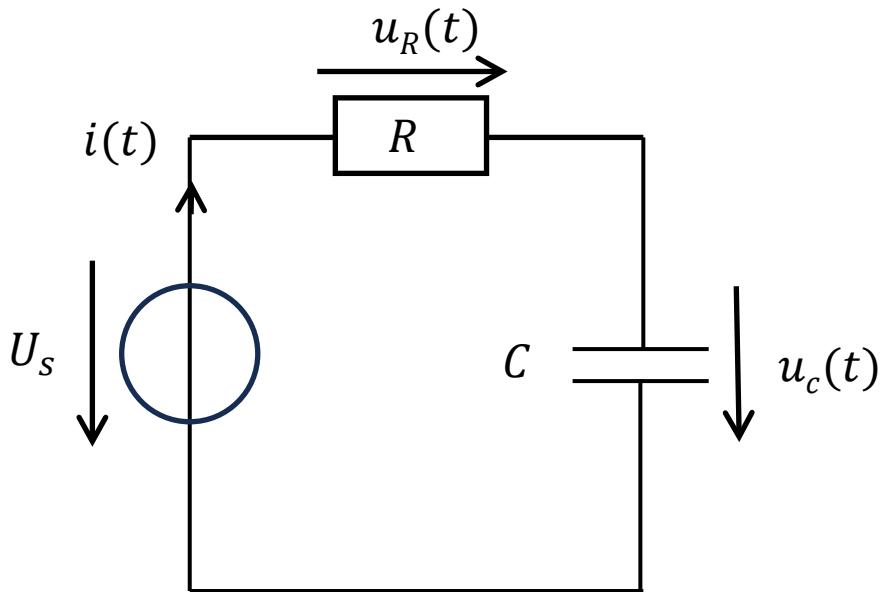
τX : solution lorsque t tend vers l'infini (régime d'équilibre $\frac{d}{dt} = 0$).

τ : la constante de temps du circuit

- Après 5τ on peut estimer que le circuit a atteint le régime d'équilibre.

K : constante qui peut être déterminée si l'on connaît $x(t)$ à un quelconque instant

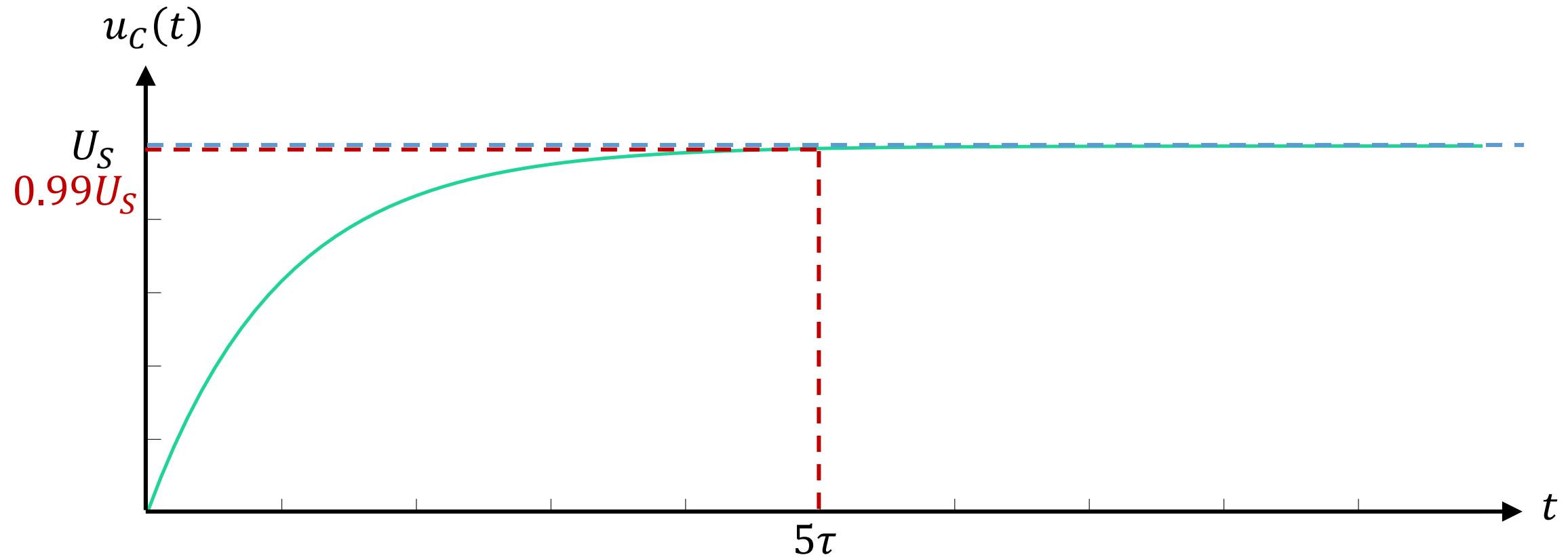
Résoudre un circuit RC: utiliser la relation entre $i(t)$ et $u_C(t)$ et résoudre l'équation différentielle obtenue à partir des lois de Kirchhoff

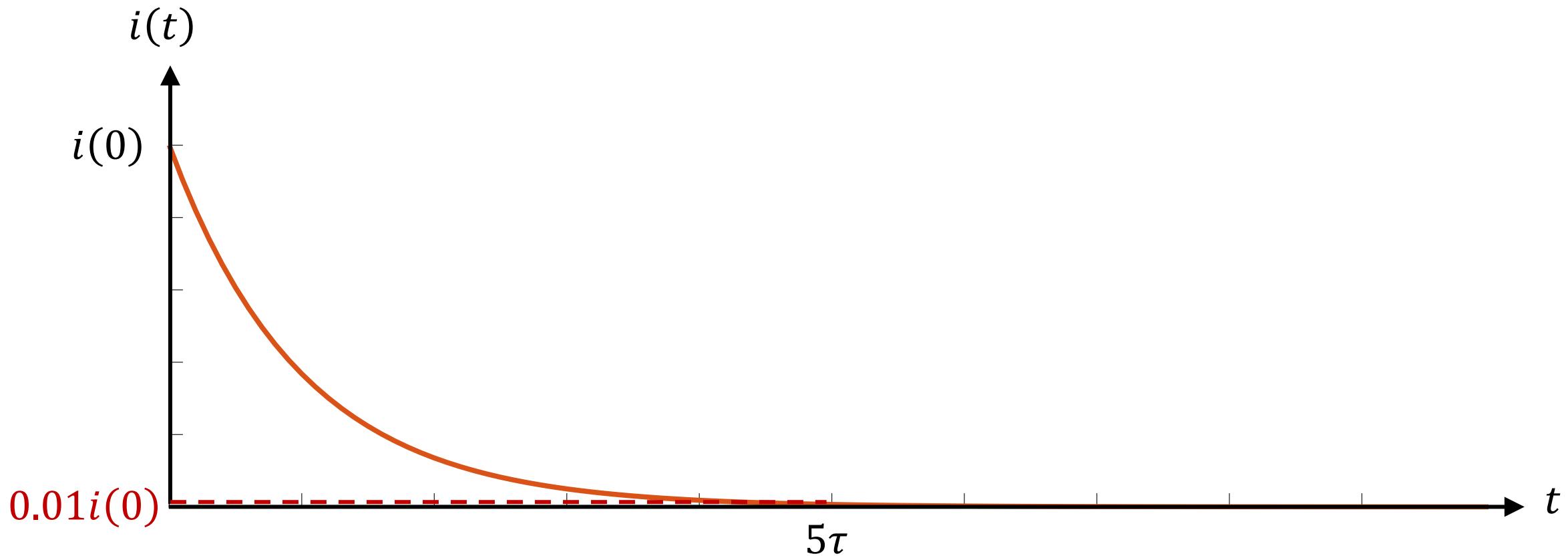


$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_c(t) = \frac{1}{RC} U_s$$

Condition initiale:

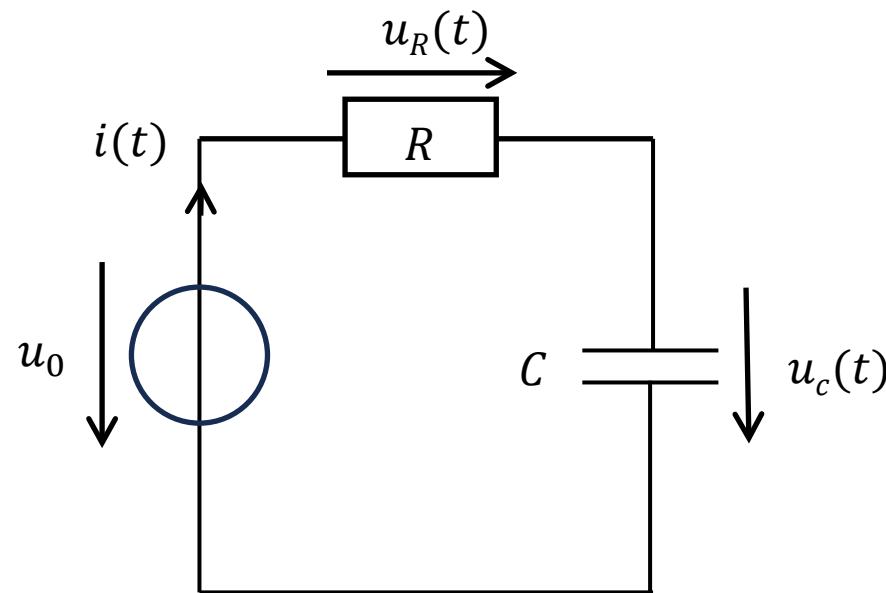
$$u_c(0) = 0 \text{ V}$$



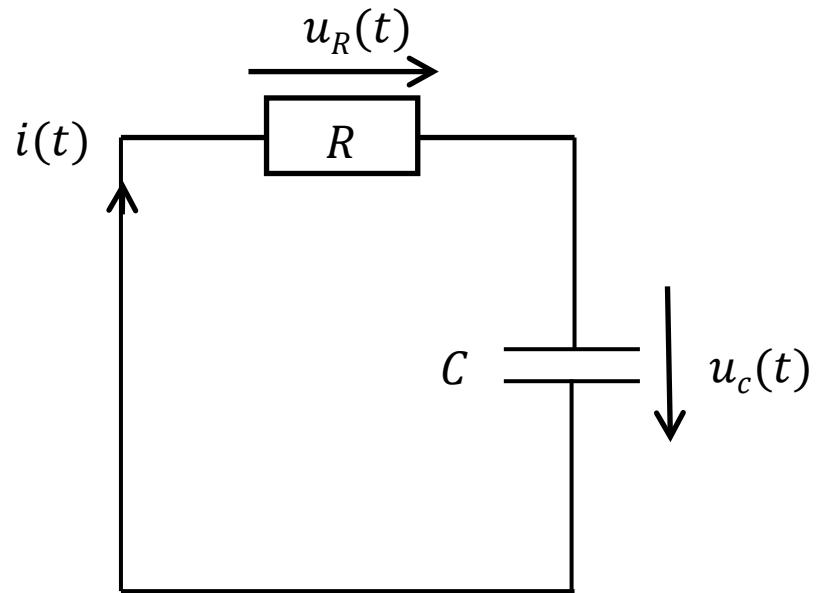


Lorsque l'on alimente le circuit avec une source de tension, le condensateur se charge

- La tension du condensateur tend vers une constante
- Le condensateur est considéré chargé après 5 constantes de temps
- Le courant du condensateur tend vers 0, correspondant au régime statique



Circuit RC – décharge du condensateur



Condition initiale:

$$u_c(0) = u_0$$

La constante de temps pour un circuit avec un seul condensateur peut être calculée en utilisant le concept de résistance équivalente

- Soit R_{eq} la résistance équivalente vue des bornes du condensateur lorsque toutes les sources du circuit sont éteintes

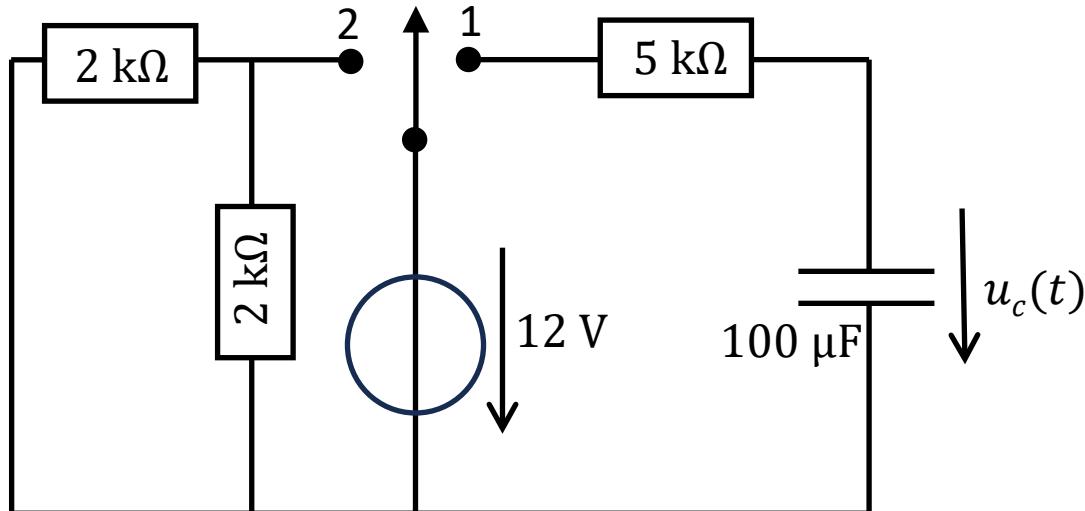
$$\tau_c = R_{eq}C$$

La tension aux bornes d'un condensateur de présente jamais de discontinuité.

Ceci n'est vrai que pour la tension du condensateur ! Autres tensions (par exemple aux bornes d'une résistance) peuvent être discontinues.

Les conditions initiales pour la résolution de l'équation différentielle ne peuvent donc être utilisée que pour le calcul $u_C(t)$

- Peu importe le courant ou la tension à trouver dans le circuit, toujours se baser sur $u_C(t)$ et le courant associé qui traverse le condensateur.



Nous avons le circuit ci-contre. Le condensateur est déchargé

A $t = 0$ nous basculons l'interrupteur est en position 1. Le circuit a atteint un régime d'équilibre.

A $t = 1.4$ s , nous commutons l'interrupteur en position 2.

Calculons $u_c(t)$ pour tout $t > 0$

Aujourd’hui, il existe des condensateurs particuliers utilisés pour des applications nécessitant de fortes densités de puissance et d’énergie

- Recharge rapide de véhicules électriques
- Démarrage de moteurs
- ...

Il s’agit de supercondensateurs

- Délivrent plus de courant que des condensateurs conventionnels
- Plus grande durée de vie que les batteries
- Plus rapide comparativement aux batteries

Leur capacité est entre le F et le kF!

Aujourd'hui, il existe des condensateurs particuliers utilisés pour des applications nécessitant de fortes densités de puissance et d'énergie

- Recharge rapide de véhicules électriques
- Démarrage de moteurs
- Récupération d'énergie lors de freinage
- ...



Bus électrique TOSA à Genève

Il s'agit de supercondensateurs

- Délivrent plus de courant que des condensateurs conventionnels
- Plus grande durée de vie que les batteries
- Plus rapide comparativement aux batteries

Leur capacité est entre le F et le kF!